Análisis Matemático I

1. (1,5 puntos) Sean las funciones $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y,z) = (\mathrm{e}^x + y^2, \lambda\,\mathrm{e}^z + y), \quad g(u,v) = \log u + v^2$$

   Calcula λ para que la derivada direccional máxima del campo escalar $h = g \circ f$ en $(0,0,0)$ sea igual a 3.

2. (1,5 puntos) Sabiendo que g es una función continua con $g(0) = 3$, justifica que la igualdad

$$\int_{x^2-1}^{xy} g(t)\,\mathrm{d}t + x^2 y = 0$$

   define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(1,0)$. Calcula $y'(1)$.

3. (2,5 puntos) Prueba que las igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x\,\mathrm{e}^v + yu - u^2 & = & 0 \\ y\cos v + x^2 - u^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

   definen a u y a v como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(2,1)$ siendo $u(2,1) = 2$, $v(2,1) = 0$. Calcula $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(2,1)$.

4. (2,5 puntos) Calcula los puntos de la elipse $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ para los cuales la distancia del origen a la tangente a la elipse en tales puntos es máxima o mínima.

5. (2 puntos) Espacios tangente y normal de una variedad.

Granada, 20 de enero de 2015